ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CURSO 2015-2016

HOJA 3

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $e^{-y} - (2y + xe^{-y})\, y' = 0.$

b) $(6xy^2 + 3x^2) + (6x^2y + 4y^3)\, y' = 0.$

c) $(xy^2 - 1) + y(x^2 + 3)\, y' = 0.$

d) $\left(2x + \dfrac{1}{y}\right) + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right) y' = 0.$

e) $(\operatorname{sen} xy + xy \cos xy) + x^2 \cos(xy)\, y' = 0.$

f) $(1 - xy) + (1 - x^2)\, y' = 0.$

g) $(y^2 + x) - 2xy\, y' = 0.$

h) $2xy \log y + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})\, y' = 0.$

2. Integra la ecuación diferencial

$$(x^2 - y^2 + 1)\, dx + (x^2 - y^2 - 1)\, dy = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante que depende de una combinación lineal de x e y.

3. Integra la ecuación diferencial

$$y^2 - xy + x^2y' = 0$$

sabiendo que existe un factor integrante que es función de xy^2.

4. Encuentra un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \varphi(y^2 - x^2)$ de la ecuación diferencial

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xy\, y' = 0$$

y resuélvela.

5. Dada la ecuación diferencial

$$y - xy^2 \log x + xy' = 0,$$

encuentra un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \varphi(xy)$ y resuélvela.

6. Demuestra que toda ecuación diferencial de la forma

$$yf(xy)\, dx + xg(xy)\, dy = 0$$

admite como factor integrante a

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy\,(f(xy) - g(xy))}.$$

Aplica este resultado a la resolución de la ecuación

$$x^3y^4\, dx - (x^2y - x^4y^3)\, dy = 0.$$

7. Halla un factor integrante de la ecuación diferencial

$$x^2 - y^2 - 1 + 2xyy' = 0$$

sabiendo que admite como solución general a la familia de curvas

$$x^2 + y^2 - cx + 1 = 0.$$

8. Sean f y g dos funciones. Demuestra que la ecuación diferencial

$$(f(x)y - g(x)y^n) + y' = 0$$

admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = X(x)Y(y)$. Halla las funciones X e Y.

9. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

b) $y' + y \operatorname{tg} x = \sec^2 x$.

c) $xy' + (1 - x)y = xe^x$.

d) $y' = \dfrac{1}{e^y - x}$.

e) $y' = \dfrac{1}{x \cos y + \operatorname{sen} 2y}$.

f) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$

10. Integra la ecuación diferencial

$$y' + \frac{y}{x} = 3 \cos 2x$$

buscando un factor integrante.

11. Resuelve la ecuación diferencial

$$y' = y \operatorname{tg} x + \cos x$$

por el método de variación de las constantes.

12. Halla la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos x}{x^2}$$

que satisface la condición inicial $y(\pi) = 0$.

13. Halla la familia de funciones tales que el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas, la recta tangente a la gráfica de ls función en un punto y la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de tangencia sea constante e igual a a^2.

14. Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - y = 1 + 3 \operatorname{sen} x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

encuentra el valor de y_0 para el que la solución permanece finita cuando x tiende a ∞.

15. Dada la ecuación diferencial

$$2x^2 y' - xy = 2x \cos x - 3 \operatorname{sen} x, \qquad x > 0,$$

estudia el comportamiento de las soluciones cuando x tiende 0 y cuando x tiende a ∞. ¿Hay alguna solución y tal que

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0?$$

16. Dadas y_1, y_2 e y_3 soluciones particulares de una ecuación lineal

$$y' + a(x)y = b(x),$$

demuestra que la expresión

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

es constante.